Fourier transform of a minimal K-type vector in the minimal representation of O(p+1,q+1) (Automorphic forms on Sp(2,$\mathbf{R}$) and SU(2,2), III)

数理解析研究所講究録 1421 巻 2005 年 1-11

Fourier transform of a minimal K-type vector in the minimal representation of $O(p+1,q+1)$ *

京都大学・数理解析研究所　小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

概要

不定値直交群 $O(p+1,q+1)$ の極小表現を $\mathbb{R}^{p+q}$ 内の錐 C 上の二乗可積分関数からなるヒルベルト空間 $L^2(C)$ に実現し、さらに、最小 K-type の生成関数を K-Bessel 関数を用いて具体的に与える。この結果は、メタプレクティック群の極小表現である Weil 表現を $\mathbb{R}^n$ 上の二乗可積分関数からなるヒルベルト空間に実現（シュレディンガーモデル）したとき、ガウス核が最小 K-type（自明表現）の生成関数であるという良く知られた結果の一般化になっている。不定値直交群の場合の $L^2(C)$ における極小表現のモデルは、Ørsted と筆者が以前に [10] で構成した極小表現の共形モデルのフーリエ変換として得られる。生成関数に関するフーリエ変換の公式（定理 A）を証明する際には、Appell の超幾何関数を援用する。

目次

0　はじめに 2

1　極小表現の K-picture 4

2　K-picture $\longleftrightarrow$ N-picture 5

3　N-picture 6

4　N^*-picture（$L^2(C)$ における実現） 7

5　最小 K-type のフーリエ変換の公式の証明について 8

*研究集会「$Sp(2,\mathbb{R})$ と $SU(2,2)$ 上の保型形式 III」2004 年 9 月 28 日-10 月 1 日 (研究代表者: 織田孝幸氏) における講演記録

0 はじめに

研究集会のテーマとして扱われている群 $Sp(2,\mathbb{R})$ と $SU(2,2)$ は低次元の不定値直交群と局所同型である：

$$Sp(2,\mathbb{R}) \approx O(3,2),$$
$$SU(2,2) \approx O(4,2).$$

そこでこの講演では、一般の不定値直交群 $O(p+1,q+1)$ の'最も小さい'ユニタリ表現[1]、すなわち**極小表現**[2]の具体的実現について紹介する。より正確にいうと、$p+q$ が4次上の偶数であり、$p,q \geq 1$ の場合に $O(p+1,q+1)$ の極小表現をまず'光錐'

$$C := \{\zeta \in \mathbb{R}^{p+q} : \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_p^2 - \zeta_{p+1}^2 - \cdots - \zeta_{p+q}^2 = 0\}$$

上の L^2-関数全体のなす Hilbert 空間 $L^2(C)$ に実現する。このとき、最小 K-type が C 上の'特殊関数'としてどのような形で表されるかがここでのテーマである。

上述の L^2-空間上のモデルは表現空間およびその内積が簡明であるという利点をもつ。たとえば、Weil 表現の Schrödinger モデルは、$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上にメタプレクティック群 $Sp(n,\mathbb{R})^\sim$ の極小表現[3]を実現したモデルである。群が不定値直交群 $O(p+1,q+1)$ の場合には [2] の主張に反し、実際には $p+q$ が4以上の偶数であるような任意の p,q (≥ 1) に対して極小表現の L^2-モデルが存在する ([12])。

この場合をもう少しつぶさに見よう。以下、一般性を失うことなく、$p \geq q \geq 1$ と仮定する。このとき、$O(p+1,q+1)$ の極小表現は次の性質をもつ：

$q = 1$ のとき $\cdots$ 最高ウェイト表現[4]。

$p = q$ のとき $\cdots$ 球表現。

$p > q > 1$ のとき $\cdots$ 最高ウェイト表現でも球表現でもない。

このようにパラメータ p,q を動かすことにより、さまざまなケースを同時に見渡せる。この点で $O(p+1,q+1)$ の極小表現はテストケースとして好都合であると考えられる[5]。

[1]'最も小さい'の1つの数学的意味は無限次元のユニタリ表現の中で Gelfand-Kirillov 次元が最小値をとるということで表される。

[2]包絡環における annihilator が Joseph ideal であるような既約ユニタリ表現を極小表現とよぶ。

[3]正確には2つの最高ウェイト表現の直和に分解する。

[4]正確には最高ウェイト表現と最低ウェイト表現の直和になる。

[5]たとえば、$q=1$ で最高ウェイト表現に対して成り立つ結果が、最高ウェイト表現でない場合にどのように自然に拡張されるかが自ずと見えることがある。

この講究録では上記の内容を以下の順に説明する

$$
\begin{array}{lll}
① & K\text{-picture} & \ni F_0 \\
 & ②\updownarrow \text{座標変換}\ \psi & \quad\downarrow \\
③ & N\text{-picture} & \ni \tilde{\psi}^* F_0 \\
 & ④\updownarrow \text{フーリエ変換}\ \mathcal{F} & \quad\downarrow \\
④ & N^*\text{-picture} & \ni \mathcal{F}\tilde{\psi}^* F_0
\end{array}
$$

ここで①, ②, ③, ④ はそれぞれ第1節、第2節、第3節、第4節で説明する。K-picture と N-picture では退化主系列表現における部分表現として極小表現を実現[6]する。また、N^*-picture ではヒルベルト空間 $L^2(C)$ に極小表現を実現[7]する（系 C）。

F_0 は最小 K-type に属する関数であり、第1節で定義するように実質上は Jacobi 多項式（従って Gauss の超幾何関数の特殊値）で表される。このとき、N^*-picture、つまり $L^2(C)$ においてこの関数の対応物を求めたい。すなわち、ここでの目標は以下の通りである。

目標. $\mathcal{F}\tilde{\psi}^* F_0$ を具体的に求めよ。

この答は K-Bessel 関数を用いて定理 A （第4節）で与えられる。$\mathcal{F}\widetilde{\psi^*} F_0$ が $L^2(C)$ の元を定めることはアプリオリには自明ではないが、具体的な公式（定理 A）からは直ちに従う。

それぞれの実現で Hilbert 空間の内積や群の作用がどのくらい明示的に表されるかについて記号的に表してみよう。以下の表では ◎ は定義からただちに明示的に表せることを表す。

	内積	K の作用	各 K-type に属する関数
K-picture	△[8]	◎	◎
N-picture	△[9]	○	○
N^*-picture	◎	△[10]	△

[6] この実現は Howe-Tan [3] で implicit に扱われている他、Kostant [13], Binegar-Zierau [1] などいくつかの論文で扱われている。また小林-Ørsted [10] は共形幾何の立場からこの部分表現に幾何的な意味づけを与えた。

[7] [7] では、Weil 表現の場合にちなんで「極小表現の Schrödinger モデル」とよんだ。

[8] K-type に分解し、各既約成分に explicit な weight を与えるという形で内積が知られている。証明は $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とし、$\mathfrak{p}$ の K-type への作用を調べる手法（Howe-Tan [3], Kostant [13], Binegar-Zierau [1]）や intertwining operator のスペクトル分解を用いる手法（小林-Ørsted [10, 11]）がある。

[9] ウルトラ双曲型微分方程式の保存量を Cauchy data から記述するというアイディアと佐藤超関数のアイディアを用いることによって内積を intrinsic な形で記述することができる [5, 6, 12]。

[10] リー環 $\mathfrak{k}$ は C 上のベクトル場として作用するとは限らず、一般には2階の偏微分作用素として作用する。

定理 A は表の右下の △ に関する明示的な公式を与えるものである。

記号：以下では特に断らない限り

$$p \geq q \geq 1, \quad p+q \text{は偶数} > 2$$

と仮定し、

$G = O(p+1, q+1)$
$K = O(p+1) \times O(q+1)$
$\mathfrak{p}_{\max}$: リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+1, q+1)$ の極大放物型部分代数で、$\mathfrak{o}(1,1) \oplus \mathfrak{o}(p,q)$ を Levi 部分代数とするもの
$P_{\max}$: $\mathfrak{p}_{\max}$ に対応する G の極大放物型部分群

とする。

1 極小表現の K-picture

前述の $P_{\max}$ は G の部分群の中で（G 自身を除いて）最大次元のものであり、従ってその等質空間 $G/P_{\max}$ は G の等質空間として最小次元のものである。従ってその上の関数空間（あるいはベクトル束の切断の空間）に実現された G の退化系列表現[11]は G の無限次元表現の中でも Gelfand-Kirillov 次元がかなり小さいものになる。その部分表現はさらに'小さい'表現になりうる。このようにして得られた部分表現のうち、ユニタリ化可能なものが実際 G の極小表現になっている。この部分表現を説明するのがこの節の目標である。第 1 節から第 3 節までは小林-Ørsted の第 1 論文 [10] の特別な場合を紹介する。大まかな流れは Winter School での講義録 [5] も参照されたい。

以下では $G/P_{\max}$ のかわりに、その二重被覆

$$M := S^p \times S^q$$

上の関数を考えよう。直積多様体 $M = S^p \times S^q$ に第 2 成分は -1 倍することによって符号 (p,q) の擬リーマン計量 $g_{S^p} - g_{S^q}$ を入れる。このとき

$$M \text{のラプラシアン} \quad \Delta_M = \Delta_{S^p} - \Delta_{S^q}$$
$$M \text{の山辺作用素} \quad \widetilde{\Delta_M} := \Delta_{S^p} - \Delta_{S^q} - (\frac{p-2}{2})^2 + (\frac{q-2}{2})^2$$

となり、G の極小表現は以下の部分空間 $\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ 上に実現できる。

$$C^\infty(M) \supset \{F \in C^\infty(M) : \widetilde{\Delta_M} F \equiv 0\} =: \mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$$

[11] これは例えば Howe-Tan が [3] で組成列を研究した退化系列表現に他ならない。

この G の $\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ 上の表現は既約であり、適当な内積によって完備化するとユニタリ表現を得る。

さらに山辺作用素を

$$\widetilde{\Delta_M} = \Delta_{S^p} - (\Delta_{S^q} + \frac{p-q}{2}(\frac{p-q}{2} + q - 2))$$

と書き改めてみると、$\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ の部分空間

$$\{F \in C^\infty(M) : \Delta_{S^p} F = (\Delta_{S^q} + \frac{p-q}{2}(\frac{p-q}{2} + q - 2))F = 0\}$$

には G の部分群 $K = O(p+1) \times O(q+1)$ が既約表現 $\mathbf{1} \boxtimes \mathcal{H}^{\frac{p-q}{2}}(\mathbb{R}^{q+1})$ として作用する。これが極小表現 $\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ の最小 K-type になる。ここで $\mathcal{H}^l(\mathbb{R}^{q+1})$ は l 次の球面調和関数の空間を表す。

さらに、$M = S^p \times S^q \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ の標準座標 $(u_0, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p+q+1})$ を用いて M 上の関数 F_0 を

$$F_0(u_0, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+q+1}) := {}_2F_1(\frac{q-p}{4}, \frac{p+q-2}{4}, \frac{q}{2}; 1 - u_{p+q+1}^2)$$

で定義する。ここで ${}_2F_1$ は Gauss の超幾何関数を表す。F_0 は極小表現 $\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ の最小 K-type に属する関数であり、その K-span[12]、G-span はそれぞれ、極小 K-type の表現空間、極小表現 $\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ の G-不変な稠密な部分空間となる。F_0 を '生成元' とよぶことにしよう。第1節の結果をまとめると、

$$\begin{array}{cccl} G & \curvearrowright & \mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M}) & G \text{ の極小表現} \\ \cup & & \cup & \\ K & \curvearrowright & \mathbf{1} \boxtimes \mathcal{H}^{\frac{p-q}{2}}(\mathbb{R}^{q+1}) & \text{極小 } K\text{-type} \\ & & \Cup & \\ & & F_0 & \text{'生成関数'} \end{array}$$

2 K-picture $\longleftrightarrow$ N-picture

ここでは幾何的な観点（共形幾何）をまじえながら、K-picture と N-picture の間の intertwining operator $\widetilde{\psi}^*$ を説明しよう。

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{R}^{p+q} & \to & S^p \times S^q \\ \Cup & & \Cup \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{\tau(x,y)}(1 - \dfrac{|x|^2 - |y|^2}{4}, x; y, 1 + \dfrac{|x|^2 - |y|^2}{4}) \end{array}$$

[12] K の作用で閉じている最小の複素線型空間

但し、$\tau(x,y)$ は $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の正値の関数で、以下で定義される。

$$\begin{aligned}\tau(x,y) &= ((1-\frac{|x|^2-|y|^2}{4})^2+|x|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|y|^2+(1+\frac{|x|^2-|y|^2}{4})^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1+(\frac{|x|^2+|y|^2}{2})^2)^{\frac{1}{2}}(1+(\frac{|x|^2-|y|^2}{2})^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

例 1. $q=0$ ならば、ψ は通常の立体射影である。

このとき、ψ は擬リーマン多様体 $(\mathbb{R}^{p+q}, dx_1^2+\cdots+dx_p^2-dy_1^2-\cdots-dy_q^2)$ から擬リーマン多様体 $(S^p\times S^q, g_{S^p}-g_{S^q})$ への共形写像となる。すなわち、

$$\psi^*(g_{S^p}-g_{S^q}) = \tau(x,y)^{-2}(dx_1^2+\cdots+dx_p^2-dy_1^2-\cdots-dy_q^2).$$

共形幾何においては、関数の引き戻しに共形係数 (conformal factor) τ の冪乗をかけた twisted pull-back が重要な役割を果たす。すなわち、

$$\begin{array}{cccc}\widetilde{\psi}^*: C^\infty(S^p\times S^q) & \to & C^\infty(\mathbb{R}^{p+q}) \\ \uplus & & \uplus \\ f & \mapsto & \tau^{-\frac{p+q-2}{2}}(f\circ\psi)\end{array}$$

を考えると、山辺作用素の一般論により F と $f:=\widetilde{\psi}^*F$ に関して次は同値となる：

$$\widetilde{\Delta_M}F=0 \Longleftrightarrow \Box_{\mathbb{R}^{p,q}}f=0. \tag{2.1}$$

ただし、

$$\Box_{\mathbb{R}^{p,q}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial y_q^2}.$$

3 N-picture

G-intertwining operator $\widetilde{\psi}^*$ を用いて M 上の関数空間 $\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ の表現を $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の関数空間 $\widetilde{\psi}^*(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M}))$ の表現に移そう。このとき、(2.1) より

$$\widetilde{\psi}^*(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})) \subset \{f\in C^\infty(\mathbb{R}^{p+q}) : \Box_{\mathbb{R}^{p,q}}f=0\}\cap\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{p+q})$$

が成り立つ。また極小 K-type の生成元 F_0 は $\widetilde{\psi}^*$ によって $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の関数

$$\begin{aligned}f_0(x,y) &:= (\widetilde{\psi}^*F_0)(x,y) \\ &= \tau(x,y)^{-\frac{p+q-2}{2}}{}_2F_1(\frac{q-p}{4},\frac{p+q-2}{4};\frac{q}{2};\frac{|y|^2}{\tau(x,y)^2}) \\ &= \frac{{}_2F_1(\frac{q-p}{4},\frac{p+q-4}{4};\frac{q}{2};\frac{|y|^2}{(1+(\frac{|x|+|y|}{2})^2)(1+(\frac{|x|-|y|}{2})^2)})}{((1+(\frac{|x|+|y|}{2})^2)(1+(\frac{|x|-|y|}{2})^2))^{\frac{p+q-4}{4}}}\end{aligned} \tag{3.1}$$

に移される。

4　N^*-picture　($L^2(C)$ における実現)

この節は小林-Ørsted の第 3 論文 [12] の後半を中心に解説する。最小 K-type のフーリエ変換を与える公式（定理 A）がこの節の主結果であり、それは次の第 5 節で説明する。極小表現が L^2-モデルで実現できるという系 C について、Green 関数を用いた別のアプローチのアイディアは講義録 [5] で紹介しているので、興味のある方はそれも併せて参照されたい。

$\mathbb{R}^{p+q}$ 上の 2 次形式 Q を

$$Q(\zeta) := \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_p^2 - \zeta_{p+1}^2 - \cdots - \zeta_{p+q}^2 \quad \text{for} \quad \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

と定義する。0 節で述べた '光錐' C は $\{\zeta \in \mathbb{R}^{p+q} : Q(\zeta) = 0\}$ で与えられる。

Schwartz 超関数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{p+q})$ に対して

$$\Box_{\mathbb{R}^{p,q}} f = 0 \Longleftrightarrow Q(\mathcal{F}f) = 0$$

なので、

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset C$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{array}{ccccc} K\text{-picture} & \Rightarrow & N\text{-picture} & \Rightarrow & N^*\text{-picture} \\ \mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M}) & & \widetilde{\psi^*}(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})) & & \mathcal{F}\widetilde{\psi^*}(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})) \end{array}$$

と移行したとき、N^*-picture の $\mathcal{F}\widetilde{\psi^*}(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M}))$ は C に台をもつ超函数の部分空間になる。特に極小表現の '生成元' f_0 に対しても $\operatorname{supp} \mathcal{F}f_0 \subset C$ が成り立つ。$\mathcal{F}f_0$ を具体的に書き下すために、C 上の測度 $d\mu \equiv \delta(Q)$ を以下のように定める（$\delta(Q)$ は Gelfand 流の表記法である)。

まず C を極座標表示する：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{p+q} \supset C := \{\zeta \in \mathbb{R}^{p+q} : Q(\zeta) = 0\} & \ni & (r\omega, r\eta) \\ \uparrow & & \updownarrow \\ \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^{p-1} \times S^{q-1} & \ni & (r, \omega, \eta) \end{array}$$

この極座標表示に関して、C 上の測度 $d\mu$ を

$$\begin{aligned} d\mu &:= \frac{1}{2} r^{p+q-3} dr d\omega d\eta \\ &= \delta(Q) \end{aligned}$$

と定める。$d\mu$ は $O(p,q)$ 不変な測度である。このとき、$p+q \geq 4$ なので、

$$L^2(C, d\mu) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{p+q})$$

とみなせる。
また、$\mathbb{R}^{p+q}$ 上の通常のノルムを

$$|\zeta| = (\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_{p+q}^2)^{\frac{1}{2}}$$

と定める。次の定理が本原稿の主結果である。

定理 A (最小 K-type のフーリエ変換).

$$(\mathcal{F}f_0)(\zeta) = C_{p,q}|\zeta|^{1-\frac{q}{2}}K_{\frac{q}{2}-1}(2|\zeta|)\delta(Q)$$

但し、$C_{p,q}$ は $C_{p,q} = 2^{\frac{q}{2}+2}\pi^{\frac{p+q}{2}}\frac{\Gamma(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{p+q-2}{2})}$ で与えられる定数である。

$G = O(p+1, q+1)$ の極小表現の K-picture として $\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M}) = \{F \in C^\infty(S^p \times S^q) : (\Delta_{S^p} - \Delta_{S^q} - (\frac{p-2}{2})^2 + (\frac{q-2}{2})^2)F = 0\}$ に表現を実現していたことを思い出そう。
次の系で最も重要なことは $\mathcal{F}\widetilde{\psi}^*(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})) \cap L^2(C) \neq \{0\}$ という主張である。

系 B. $\mathcal{F}\widetilde{\psi}^*(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M}))$ は $L^2(C)$ の稠密な部分空間である。

系 B をいいかえると L^2-内積による $\mathcal{F}\widetilde{\psi}^*(\mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M}))$ の完備化が $L^2(C)$ であるということに他ならない。そこで第 1 節で述べた $G \curvearrowright \mathcal{S}ol(\widetilde{\Delta_M})$ に関する既知の結果と合わせることにより次の系が示された。

系 C (極小表現のシュレディンガーモデル, [7, 12]). $L^2(C)$ 上に G の極小表現を実現することができる。

系 D (生成関数). C 上の生成関数 $|\zeta|^{1-\frac{q}{2}}K_{\frac{q}{2}-1}(2|\zeta|)$ は次の性質をもつ

1) $L^2(C)$ に属する。

2) K-span は極小表現の最小 K-type を与える。

3) G-span は極小表現 $L^2(C)$ の稠密な部分空間を与える。

5 最小 K-type のフーリエ変換の公式の証明について

定理 A を証明するためには $\phi(r) = r^{1-\frac{q}{2}}K_{\frac{q}{2}-1}(2r)$ とおいたとき、逆フーリエ変換の公式

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi(r)\delta(Q)) = Cf_0 \tag{5.1}$$

を言えばよい。
ここで、次の 2 つの公式 1), 2) を準備する。

1) $\int_{S^{m-1}} e^{it(\omega,\omega')}d\omega' = (2\pi)^{\frac{m}{2}}t^{1-\frac{m}{2}}J_{\frac{m-1}{2}}(t).$

2)
$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}J_\nu(at)J_\mu(bt)K_\rho(ct)dt$$
$$= (\text{function of } (\lambda,\mu,\nu,\rho)) \times \frac{a^\nu b^\mu}{c^{\lambda+\mu+\nu}}\times$$
$$F_4(\frac{\lambda+\mu+\nu+\rho}{2},\frac{\lambda+\mu+\nu-\rho}{2},\mu+1,\nu+1;-\frac{a^2}{c^2},-\frac{b^2}{c^2}).$$

但し、F_4 は Appell の超幾何関数で、次式により定義される。

$$F_4(a,b,c,d;x,y)=\sum_{i=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty\frac{(a)_{i+j}(b)_{i+j}}{i!j!(c)_i(d)_j}x^iy^j$$

(1), (2) を用いると、

$$\begin{aligned}
(5.1)\text{ の左辺} &= \mathcal{F}^{-1}(\phi(r)\delta(Q))(x,y)\\
&= (2\pi)^{-(p+q)}\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{S^{p-1}}\int_{S^{q-1}} r^{p+q-3}\phi(r)e^{ir((x,\omega)+(y,\eta))}dr\,d\omega\,d\eta\\
&= C\int_0^\infty r^{p+q-3}r^{1-\frac{q}{2}}K_{\frac{q}{2}-1}(2r)(r|x|)^{1-\frac{p}{2}}J_{\frac{p}{2}-1}(r|x|)(r|y|)^{1-\frac{q}{2}}J_{\frac{q}{2}-1}(r|y|)dr\\
&= C|x|^{1-\frac{p}{2}}|y|^{1-\frac{q}{2}}\int_0^\infty r^{\frac{p}{2}}J_{\frac{p}{2}-1}(r|x|)J_{\frac{q}{2}-1}(r|y|)K_{\frac{q}{2}-1}(2r)dr\\
&= C'F_4(\frac{p+q-2}{2},\frac{p}{2};\frac{p}{2},\frac{q}{2};-\frac{|x|^2}{4},\frac{|y|^2}{4})\\
&= \tau(x,y)^{-\frac{p+q-2}{2}}{}_2F_1(\frac{q-p}{4},\frac{p+q-2}{4};\frac{q}{2};\frac{|y|^2}{\tau(x,y)^2})\\
&= (5.1)\text{ の右辺}
\end{aligned}$$

となり定理 A が示される。最後から 2 番目の等式は Appell の超幾何関数の reduction formula を適用することによって証明される。

最後に：

1. 定理 A の '生成関数'

$$(\mathcal{F}f_0)(\zeta)=|\zeta|^{1-\frac{q}{2}}K_{\frac{q}{2}-1}(2|\zeta|)\times C\text{ 上の不変測度}$$

は、$q=1$ の場合にはラゲールの多項式になる。また、メタプレクティック群の Weil 表現のシュレディンガーモデルで類似の問題を考えると、'生成関数' は、ガウス核 e^{-r^2} に相当する。いずれの関数も無限遠で exponential decay になっていることに注意しよう。

2. 退化系列の部分表現から $L^2(C)$ へのフーリエ変換を具体的に計算するためにここで与えた手法は、別の群の別の（小さな）表現に対しても適用できると思われる。

3. 最小 K-type に属さない関数に対しても、最近、真野元氏との共同研究で定理 A の一般化に相当する積分公式を得た。その応用について別の機会に触れたい。

参考文献

[1] B. Binegar and R. Zierau, Unitarization of a singular representation of $SO(p, q)$, *Comm. Math. Phys.*, **138** (1991), 245–258.

[2] A. Dvorsky and S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations II, *Invent. Math.*, **138** (1999), 203–224.

[3] R. Howe and E. Tan, Homogeneous functions on light cones, Bull. Amer. Math. Soc., **28** (1993), 1-74.

[4] J.-S. Huang and C.-B. Zhu, On certain small representations of indefinite orthogonal groups, *Representation Theory*, **1** (1997), 190–206.

[5] T. Kobayashi, Conformal geometry and global solutions to the Yamabe equations on classical pseudo-Riemannian manifolds, Proceedings of the 22nd Winter School "Geometry and Physics" (Srni, 2002). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **71** (2003), 15–40.

[6] 小林俊行, 山辺作用素の解空間における不変な内積について, 数理解析研究所講究録 1294（非可換代数系の表現と調和解析, ed. 太田琢也氏）(2002), 76–86.

[7] 小林俊行, $O(p, q)$ の極小ユニタリ表現のシュレディンガーモデル, 数理解析研究所講究録 1342（IV 型対称空間上の保型形式の研究, ed. 織田孝幸氏）(2003), 107–116.

[8] T. Kobayashi and G. Mano, Integral formulas for the minimal representation of $O(p, 2)$, *Acta Appl. Math.*, to appear.

[9] 小林俊行–真野元, $O(p, 2)$ の極小表現と反転の積分表示, 数理解析研究所講究録（表現論および等質空間上の調和解析, ed. 井上順子氏）, to appear, 15 pages.

[10] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of $O(p, q)$ I. Realization via conformal geometry, *Adv. Math.*, **180** (2003), 486–512.

[11] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of $O(p, q)$ II. Branching laws, *Adv. Math.*, **180** (2003), 513–550.

[12] T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representation of $O(p, q)$ III. Ultrahyperbolic equations on $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$, *Adv. Math.*, **180** (2003), 551–595.

[13] B. Kostant, The vanishing scalar curvature and the minimal unitary representation of $SO(4,4)$, eds. Connes et al, Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Progress in Math., **92** , Birkhäuser, 1990 Boston, 85–124.

[14] S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations, *Invent. Math.*, **110** (1992), 409–418.